

هندسه (۲)
ریاضی فیزیک
شماره (۱)

اگر نهایی شد...! سخت

بچه‌ها سلام خسته نباشین!

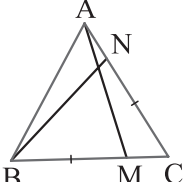
راستش با این تغییراتی که آموزشش پرورش تو این چند سال در شیوه امتحان گرفتن ایجاد کرده. خیلی‌هاتون نگرانین نکته بازم امتحان هندسه یازدهم سخت باشه؟!

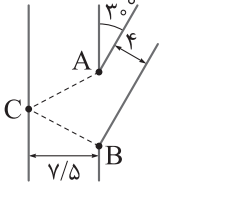
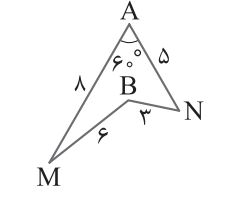
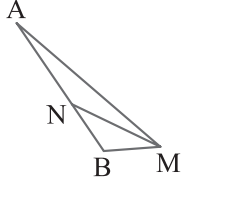
ما هم گفتیم خب. باید یه کاری بکنیم! با یه تیم خفن از طراح‌های سؤال نشستیم و فکر کردیم. آزمون‌هایی طراحی کنیم تو چارچوب **امتحان نهایی** که هم از نظر محتوا و هم از نظر ساختار استاندارد آزمون اصلی رو داشته باشه. اسمش رو هم گذاشتیم **«اگر نهایی سخت شد...!»** تا اگر واقعاً سخت شد شما از قبل آماده‌اش باشین!

برو که بریم...!

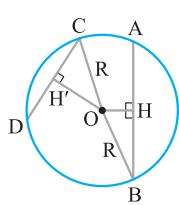


SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

	تاریخ آزمون:	رشته: علوم تجربی	سؤالات آزمون شبیه‌ساز نهایی: هندسه (۲)
	مدت آزمون: ۹۰ دقیقه	پایه یازدهم دوره دوم متوسطه	نام و نام خانوادگی:
	تعداد صفحه: ۲	مرکز ارزشیابی خیلی سبز	منطبق بر رویکرد جدید امتحانات نهایی
۱	الف) یک شش‌ضلعی منتظم به ضلع ۱۰ در دایره‌ای محاط شده است. طول شش‌ضلعی منتظم محیطی بر همان دایره برابر است.		
۲۵٪	ب) اگر چند دایره با شعاع‌های متفاوت در نقطه T بر هم مماس باشند، طول مماس‌هایی که از نقطه M بر تمام این دایره‌ها رسم می‌شوند، برابرند. (درست - نادرست)		
۲۵٪	پ) تجانس معکوس، جهت شکل را حفظ می‌کند. (درست - نادرست)		
۲	گزینه درست را در سؤالات زیر انتخاب کنید:		
۵٪	الف) در یک مثلث متساوی‌الاضلاع، شعاع دایره محاطی داخلی آن $\sqrt{3}$ است، شعاع دایره محاطی خارجی و دایره محیطی آن به ترتیب برابر است با: (۱) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ و $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (۳) $2\sqrt{3}$ و $3\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{3}$ و $3\sqrt{3}$		
۲۵٪	ب) اگر G محل هم‌رسمی میانه‌های مثلث ABC باشد و A ^D (مجانس A به مرکز تجانس G)، منطبق بر وسط ضلع BC باشد، نسبت تجانس چه قدر است؟ (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$		
۵٪	پ) اگر در مثلث ABC، نیمساز زاویه A و عمودمنصف ضلع BC یکدیگر را در M قطع کنند و $\hat{B} = 70^\circ$ و $\hat{C} = 50^\circ$ باشد، اندازه زاویه CBM برابر است با (۱) 30° (۲) 60° (۳) 45° (۴) 25°		
۳	الف) ثابت کنید بین دو وتر نابرابر یک دایره، وتری که از مرکز دایره دورتر است، کوتاه‌تر است.		
۱	ب) نقطه C روی وتر AB به طول ۹ چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت یک به دو تقسیم می‌کند، طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده بر نقطه C را به دست آورید.		
۴	طول خط‌المركزین دو دایره مماس داخل برابر ۴ است. اگر مساحت ناحیه محدود بین آن‌ها برابر ۳۲p باشد،		
۱	الف) شعاع‌های دو دایره را بیابید.		
۵٪	ب) اندازه بزرگ‌ترین قطعه مماسی که یک سر آن روی دایره بزرگ‌تر و سر دیگر آن روی دایره کوچک‌تر است را محاسبه کنید.		
۱	ثابت کنید اگر از مرکز دایره به وسط کمانی از آن دایره وصل کنیم، آن‌گاه عمودمنصف وتر نظیر آن کمان خواهد بود.		
۲	ثابت کنید یک چهارضلعی محیطی است اگر و تنها اگر مجموع اضلاع روبه‌روی آن‌ها برابر باشند.		
۱/۵	نقطه A به فاصله $4\sqrt{3}$ از خط L قرار دارد. تصویر آن را تحت بازتاب نسبت به L، نقطه B می‌نامیم، سپس نقطه A را حول B به اندازه 120° دوران می‌دهیم تا نقطه C حاصل شود. طول موارد زیر را به دست آورید: الف) AC (ب) فاصله B تا AC (پ) فاصله C تا AB		
۷۵٪		۸ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مطابق شکل، $BM = CN$ است و با یک دوران به مرکز O، مثلث ABN بر مثلث ACM تصویر می‌شود. الف) اگر A دوران یافته B باشد، چرا عمودمنصف AB از O می‌گذرد؟ ب) مرکز دوران O و اندازه زاویه دوران را مشخص کنید.	
		ادامه سؤالات در صفحه دوم	

	تاریخ آزمون:	رشته: علوم تجربی	سوالات آزمون شبیه‌ساز نهایی: هندسه (۲)
	مدت آزمون: ۹۰ دقیقه	پایه یازدهم دوره دوم متوسطه	نام و نام خانوادگی:
	تعداد صفحه: ۲	مرکز ارزشیابی خیلی سبز	منطبق بر رویکرد جدید امتحانات نهایی
۱/۵		۹ مطابق شکل، یک آبراهه کوچک با زاویه ۳۰° و به عرض ۴ متر از یک رودخانه به عرض ۷/۵ جدا شده است. نقطه C را در چه نقطه‌ای از طرف دیگر رودخانه انتخاب کنیم که هنگام حرکت از A به C و سپس به سمت نقطه B، کوتاه‌ترین مسیر ممکن را داشته باشیم و طول این مسیر را بیابید.	
۱/۲۵	۱۰ در دوزنقه‌ای به قاعده‌های ۳ و ۹ و ارتفاع ۴، فاصله مراکز تجانس مستقیم و معکوسی که در آن، قاعده بزرگ مجانس قاعده کوچک است را به دست آورید.		
۱	۱۱ نقاط A(۰,۲) و B(-۴,۰) را در دستگاه مختصات رسم کرده و پاره خط AB و مجانس آن را به مرکز مبدأ مختصات و نسبت k رسم کنید (k > ۱). اگر مساحت محصور بین AB و تصویر آن، ۴۰ واحد مربع باشد، مقدار k کدام است؟		
۱/۵	۱۲ در مثلث ABC، نقطه دلخواه F روی ضلع AC قرار دارد. ثابت کنید: $AB^2 \cdot CF + BC^2 \cdot AF = BF^2 \cdot AC + CF \cdot FA \cdot CA$		
۱	۱۳ در مثلث ABC، زاویه A برابر ۱۲۰° و اضلاع AB و AC به ترتیب ۶ و ۸ هستند و نیمساز زاویه A را رسم می‌کنیم. الف) طول نیمساز AD را به دست آورید. ب) مساحت مثلث ABD را محاسبه کنید.		
۱/۵		۱۴ می‌خواهیم مساحت زمین مقابل را بدون تغییر محیط آن، افزایش دهیم. میزان این افزایش مساحت چه قدر است؟	
۰/۷۵	۱۵ نقطه‌ای درون مثلث به اضلاع ۴، ۱۳ و ۱۵ به نام M وجود دارد، به طوری که M از اضلاع ۴ و ۱۳ سانتی‌متری، به ترتیب به فاصله ۱ و ۲ است. فاصله M تا ضلع دیگر چه قدر است؟		
۰/۷۵		۱۶ در شکل مقابل، $\hat{A} = 15^\circ$ ، $\hat{B} = 120^\circ$ ، $\hat{N} = 30^\circ$ و $AB = 12$. طول ضلع MB چه قدر است؟ $(\cos 75^\circ = \sin 15^\circ \approx 0/26)$	
۲۰	جمع نمرات «موفق باشید»		

۳ الف



حکم $CD < AB$

فرض $OH' > OH$

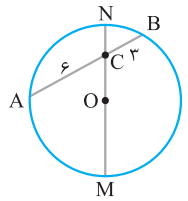
$$\begin{aligned} R^2 &= HB^2 + OH^2 \\ R^2 &= CH'^2 + OH'^2 \end{aligned}$$

$$HB^2 + OH^2 = CH'^2 + OH'^2 \quad (*) \quad (o/25)$$

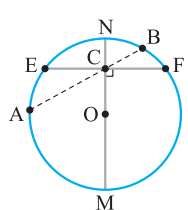
چون طبق فرض $OH' > OH$ است؛ پس $OH' > OH$ و به خاطر ایجاد توازن در تساوی (*) باید $CH' < HB$ باشد.

$$CH' < HB \quad \Rightarrow \quad 2CH' < 2HB$$

$$CH = HD \quad HB = HA \quad \Rightarrow \quad CD < AB \quad (o/25)$$



$$\begin{aligned} AB &= 9 \quad \Rightarrow \quad AC = 3a \quad \Rightarrow \quad a = 3 \\ \frac{BC}{AC} &= \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad BC = a \quad \Rightarrow \quad a = 3 \\ \frac{BC}{AC} &= \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad BC = 3 \quad \Rightarrow \quad AC = 6 \end{aligned}$$



بلندترین وتری که از یک نقطه مثل C می‌گذرد، قطر است (MN). حال کوتاه‌ترین وتری که از C می‌گذرد، باید در نقطه C بر MN عمود باشد، (o/25) چون EF نسبت به بقیه وترهای گذرا از C، از مرکز دورتر است.

$$EC = CF = x$$

قطر عمود بر وتر EF آن را نصف می‌کند، پس:

$$AC - CB = \frac{EC}{x} - \frac{CF}{x}$$

طبق رابطه طولی:

$$6 - 3 = \frac{x}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 3\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad EF = 2x = 6\sqrt{2} \quad (o/25)$$

۴ الف در دو دایره مماس داخل با خط‌المركزين d و شعاع‌های R و R، داریم $d = R - R$.

مساحت دایره کوچک - مساحت دایره بزرگ = ناحیه محدود بین دو دایره

$$= pR^2 - pR'^2 \quad (o/25)$$

$$32p = pR^2 - pR'^2 \quad \Rightarrow \quad 32 = (R - R')(R + R')$$

$$\Rightarrow R + R' = 8 \quad (o/25)$$

$$\frac{1}{2}R + R' = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}R - R' = 4 \quad \Rightarrow \quad R = 12$$

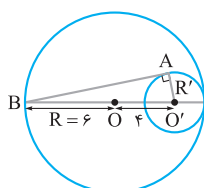
$$\Rightarrow R = \frac{12}{2} = 6, R' = 2 \quad (o/25)$$

(ب) واضح است بزرگ‌ترین قطعه مماس مورد نظر مسئله، AB است و طبق فیثاغورس

$$R^2 + AB^2 = BO'^2 \quad (o/25)$$

در $\triangle AOB$ داریم:

$$(2)^2 + AB^2 = (6)^2 \quad \Rightarrow \quad AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \quad (o/25)$$



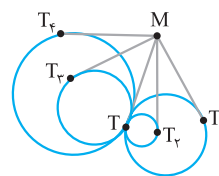
$$1 \text{ الف } \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (o/25)$$

$$x = 2R \sin \left(\frac{18^\circ}{2} \right)$$

$$1 = 2R \cdot \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad R = 1$$

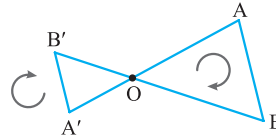
$$y = 2R \tan 3^\circ = 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(ب) درست (o/25)

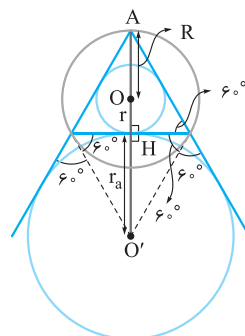


مطابق شکل چون طول دو مماس رسم شده از M بر هر کدام از دایره‌ها برابر است؛ پس: $MT = MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4$

(پ) درست (o/25)



هم تجانس مستقیم و هم معکوس، جهت شکل را حفظ می‌کنند، مثلاً مانند شکل، حرکت هم از مسیر OAB هم از مسیر OAB' ساعتگرد است.



۲ الف گزینه «۴» (o/5) چون مثلث متساوی الاضلاع، منتظم است، مرکز دایره محاطی داخلی و محیطی آن بر هم منطبق است که محل هم‌رسی عمودمنصف‌ها و نیمسازها و ارتفاع‌های مثلث است. پس مطابق شکل دو مثلث متساوی‌الاضلاع همنهشت دیده می‌شود که:

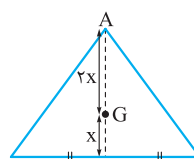
$$AH = r_a, AH = r + R$$

$$R = 2r \quad \Rightarrow \quad r_a = 3r$$

$$r = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad R = 2\sqrt{3}, r_a = 3\sqrt{3}$$

(ب) گزینه «۲» (o/25)؛ چون میانه‌های مثلث به نسبت ۲ به ۱

هم‌رس‌اند و یک تجانس معکوس داریم.



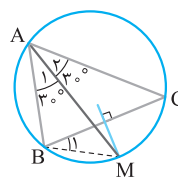
$$|k| = \frac{GA}{GA} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$k = -\frac{1}{2}$$

(پ) گزینه «۱» (o/5)؛ طبق نکته کتاب، عمودمنصف BC

و نیمساز $\hat{A}$ روی دایره محیطی مثلث هم‌رس‌اند (M).

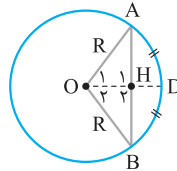
$$\hat{A} = 18^\circ - (5^\circ + 7^\circ) = 6^\circ$$



$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 3^\circ \quad \Rightarrow \quad \widehat{BM} = \widehat{MC} = 6^\circ$$

$$\widehat{MBC} = \frac{\widehat{MC}}{2} = 3^\circ$$

۵ D وسط کمان AB به مرکز O و شعاع R است.



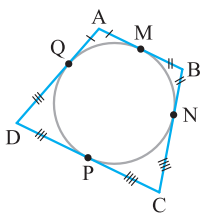
$$OA = OB = R \quad (0/25)$$

$$\widehat{AD} = \widehat{DB} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AOH} \cong \widehat{HOB} \quad (0/25)$$

$$\widehat{OH} = \widehat{OH} \quad (0/25)$$

OD وتر نظیر کمان AB را نصف کرده

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = \frac{120^\circ}{2} = 90^\circ \quad (0/25)$$



۶ فرض کنید چهار ضلعی ABCD محیطی است، پس دایره‌ای مطابق شکل بر اضلاع آن مماس است (در نقاط M, N, P, Q) چون طول مماس‌ها از هر کدام از نقاط A, B, C و D با هم برابرند؛ پس داریم: (0/25)

$$\begin{aligned} AD + BC &= \underbrace{AQ}_{=AM} + \underbrace{QD}_{=DP} + \underbrace{CN}_{=CP} + \underbrace{NB}_{=MB} \\ &= (\underbrace{AM + MB}_{=AB}) + (\underbrace{DP + CP}_{=DC}) \quad (0/25) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AD + BC = AB + DC \quad \text{حکم مسئله} \quad (0/25)$$

عکس قضیه: حال فرض کنیم در چهارضلعی ABCD داریم $AD + BC = AB + DC$ می‌دانیم دایره‌ای بر سه ضلع AB, CD و BC مماس است. چون اگر فرض کنیم نیمسازهای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ در نقطه O متقاطع‌اند، در این صورت نقطه O از سه ضلع BC, AB و CD به یک فاصله است، پس O مرکز دایره‌ای است که بر اضلاع AB, BC و CD مماس‌اند. (0/25) حال باید ثابت کنیم این دایره بر AD نیز مماس است. فرض خلف کنیم بر AD مماس نباشد، پس بر AD مماس است؛ پس ABCD چهارضلعی محیطی است. (0/25) در نتیجه:

$$\text{فرض خلف: } AB + CD = AD + BC$$

$$\text{فرض: } AB + CD = AD + BC$$

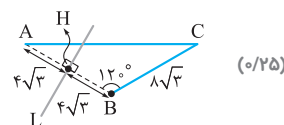
دو عبارت را از هم کم می‌کنیم:

$$\underbrace{CD - CD}_{=DD} = AD - AD \quad (0/25) \Rightarrow DD + AD = AD$$

طبق قضیه نامساوی مثلثی در $\triangle ADD$ ، این تناقض است چون باید جمع دو ضلع مثلث از ضلع سوم بیشتر باشد، لذا فرض خلف باطل است. (0/25)

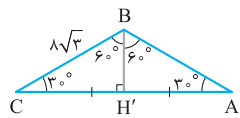
۷ طبق تعریف بازتاب، چون L عمودمنصف AB است؛ پس برای رسم از A بر L عمود کنید و به همان اندازه $4\sqrt{3}$ امتداد دهید تا به B برسیم.

$$4\sqrt{3} = AH = HB$$



$$\begin{aligned} \triangle ABC &= 120^\circ \\ \triangle AB &= BC = 8\sqrt{3} \quad (0/25) \\ a &= 120^\circ \text{ به مرکز B} \end{aligned}$$

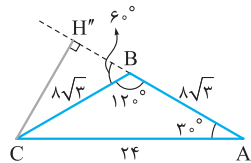
چون ABC، مثلث متساوی‌الساقین است، لذا ارتفاع و میانه و نیمساز وارد بر قاعده بر هم منطبق هستند (0/25) و مطابق شکل در مثلث قائم‌الزاویه ABH:



$$\begin{aligned} \text{الف) } \triangle ABH &= 30^\circ \text{ ضلع رو به } \triangle ABH = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \Rightarrow AC = 24 \quad (0/25) \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \triangle ABH = 30^\circ \text{ ضلع رو به } \triangle ABH = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \Rightarrow BH = 4\sqrt{3} \quad (0/25)$$

پ) فاصله C از AB همان CH است که ضلع رو به زاویه 30° در مثلث قائم‌الزاویه ACH است:



$$CH = \frac{1}{2} (AC) = \frac{1}{2} \cdot 24$$

$$\Rightarrow CH = 12 \quad (0/25)$$

۸ الف) طبق تعریف دوران، چون A دوران یافته O به مرکز O است، $AO = OB$. لذا O مرکز دوران باید روی عمودمنصف AB باشد (چون O از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است). (0/25)

ب) با توجه به اطلاعات مسئله و شکل، C دوران یافته A است؛ پس O روی عمودمنصف AC نیز قرار دارد. لذا O محل هم‌رسی عمودمنصف‌های



مثلث ABC است که در مثلث متساوی‌الاضلاع، همان محل هم‌رسی میانه‌ها و نیمسازها و ... است. (0/25) و مطابق شکل، زاویه دوران $\hat{AOB} = \hat{BOC} = \hat{COA} = 120^\circ$ است. (0/25)

۹ نقطه A را نسبت به d_1 بازتاب می‌دهیم که تصویر آن A' است. (چون d_1 عمودمنصف AA' است، $AA' = 2 \cdot 7/5 = 14$). (0/25) تقاطع AB با خط d_1 را نقطه C می‌نامیم (0/25) و چون بازتاب طولی‌است، مطابق شکل:



(0/25)

$$B \text{ به } C \text{ به } A \text{ مسیر} \Rightarrow AC + CB = AC + CB = AB \quad (0/25)$$

که چون AB خط راست است، از هر مسیر دیگری بین A و B و C کوتاه‌تر است. (طبق قضیه نامساوی مثلث) (0/25)

با توجه به این که عرض آبراه 4 است و رو به زاویه 30° در مثلث قائم‌الزاویه ABH

$$AB = 2 \cdot 4 = 8$$

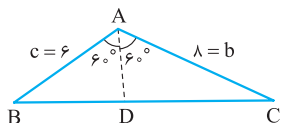
قرار می‌گیرد؛ پس AH نصف وتر است.

$$\text{فیثاغورس: } AB^2 = AH^2 + BH^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \Rightarrow AB = 4\sqrt{2} \quad (0/25)$$

با جمع روابط (۱) و (۲)، چون عبارت‌های آخر قرینه هم هستند، حذف می‌شوند:

$$\begin{aligned} & AB^2 \cdot CF + BC^2 \cdot FA \\ &= \underbrace{BF^2 \cdot CF + FA^2 \cdot CF + BF^2 \cdot FA + CF^2 \cdot FA}_{\text{فاکتورگیری } BF^2(CF+FA)} \quad (۰/۲۵) \\ & AB^2 \cdot CF + BC^2 \cdot FA = BF^2 \cdot AC + \underbrace{FA^2 \cdot CF + CF^2 \cdot FA}_{\text{فاکتورگیری } FA \cdot CF(FA+CF)} \\ &= BF^2 \cdot AC + FA \cdot CF \cdot AC \quad (۰/۲۵) \end{aligned}$$

۱۳ الف) برای محاسبه طول نیمساز، دو فرمول هست که برحسب اطلاعات مسئله انتخاب می‌کنیم که کدام فرمول مناسب‌تر است. مثلاً وقتی مثل این سؤال دو ضلع و زاویه بین آن‌ها را داده باشد، از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:



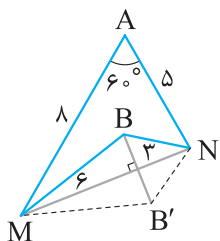
$$AD = \frac{2bc \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2}}{b+c} \quad (۰/۲۵)$$

$$AD = \frac{2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 30^\circ}{6+8} = \frac{24}{\sqrt{3}} \quad (۰/۲۵)$$

اگر طول سه ضلع را داده باشد، از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} AD^2 &= AB \cdot AC - BD \cdot DC \\ S_{ABD} &= \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ \quad (۰/۲۵) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{24}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3} \quad (۰/۲۵) \end{aligned}$$

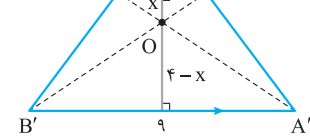
۱۴ ب) نسبت به MN بازتاب می‌دهیم و تصویر آن را B' می‌نامیم. حال چون بازتاب طولی‌است، BN = B'N و MB = MB' (۰/۲۵) پس اگر مساحت کایت MBNB' را به زمین اضافه کنیم، محیط زمین تغییر نمی‌کند، لذا کافی است مساحت مثلث MBN را محاسبه کرده و دو برابر کنیم.



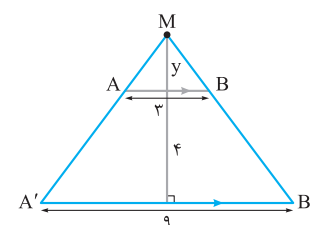
قضیه کسینوس‌ها AMN:

$$\begin{aligned} MN^2 &= AM^2 + AN^2 - 2 \cdot AM \cdot AN \cdot \cos 60^\circ \quad (۰/۲۵) \\ MN^2 &= 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 49 \Rightarrow MN = 7 \quad (۰/۲۵) \\ \text{نصف محیط } P &= \frac{3+6+7}{2} = 8, a=3, b=6, c=7 \quad (۰/۲۵) \\ S_{MNB} &= \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \quad (۰/۲۵) \\ &= \sqrt{8(8-3)(8-6)(8-7)} = 4\sqrt{5} \\ S &= 2 \cdot 4\sqrt{5} = 8\sqrt{5} \quad (۰/۲۵) \end{aligned}$$

۱۵ در دوزنقه زیر، O مرکز تجانس معکوسی است که AB مجانس است؛ پس دو مثلث OAB و OAB' متشابه‌اند. (۰/۲۵) و A و B' در یک خط قرار دارند.



$$\begin{aligned} k &= \frac{A'B'}{AB} = \frac{4-x}{x} \quad (۰/۲۵) \\ \frac{9}{3} &= \frac{4-x}{x} \Rightarrow x=1 \quad (۰/۲۵) \end{aligned}$$

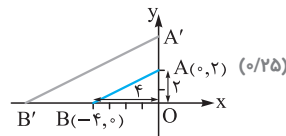


هم‌چنین اگر M مرکز تجانس مستقیم باشد که AB مجانس است (۰/۲۵) و A و B' در یک طرف M هستند.

$$\begin{aligned} \frac{y}{y+4} &= \frac{3}{9} \Rightarrow y=2 \quad (۰/۲۵) \\ MO &= x+y=1+2=3 \quad (۰/۲۵) \end{aligned}$$

جواب مسئله:

۱۱

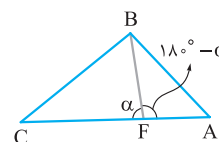


طبق تعریف تجانس $\frac{AO}{AO'} = \frac{BO}{BO'} = k$

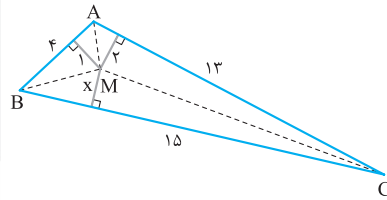
$$\begin{aligned} AO &= 2k, BO = 4k \quad (۰/۲۵) \\ S_{ABB'O} &= S_{ABO} - S_{OAB} \\ S_{AA'B'B} &= \frac{OA \cdot OB}{2} - \frac{OA' \cdot OB'}{2} \\ &= \frac{2k \cdot 4k}{2} - \frac{2 \cdot 4}{2} = \frac{8k^2 - 8}{2} = 4k^2 - 4 \quad (۰/۲۵) \\ 40 &= 4k^2 - 4 \Rightarrow k^2 - 1 = 10 \\ \Rightarrow k^2 &= 11 \Rightarrow k = \sqrt{11} \quad (۰/۲۵) \end{aligned}$$

۱۲ قضیه استوارت را باید ثابت کنیم؛ بنابراین قضیه

کسینوس‌ها را در AFB و BFC نوشته و برای این که جملات COS آن‌ها کاملاً قرینه هم شوند، تا حین جمع‌زدن دو رابطه با هم حذف شوند، باید به روش زیر عمل کنیم:



$$\begin{aligned} \text{قضیه کسینوس‌ها BFA: } AB^2 &= BF^2 + FA^2 \\ -2BF \cdot FA \cdot \cos(180^\circ - \alpha) &= -2BF \cdot FA \cdot \cos \alpha \quad (۰/۲۵) \\ &= BF^2 \cdot CF + FA^2 \cdot CF + 2BF \cdot FA \cdot CF \cdot \cos \alpha \quad (۰/۲۵) \quad (۱) \\ \text{قضیه کسینوس‌ها در BFC: } BC^2 &= BF^2 + CF^2 \\ -2BF \cdot CF \cdot \cos \alpha &= -2BF \cdot CF \cdot \cos \alpha \quad (۰/۲۵) \\ &= BF^2 \cdot FA + CF^2 \cdot FA - 2BF \cdot CF \cdot FA \cdot \cos \alpha \quad (۰/۲۵) \quad (۲) \end{aligned}$$



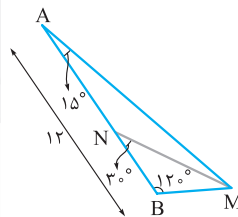
$$S_{ABC} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$P = \frac{4+13+15}{2} = 16 \quad S = \sqrt{16(16-4)(16-13)(16-15)} = 24 \quad (0/25)$$

$$S_{ABC} = S_{AMB} + S_{BMC} + S_{AMC} \quad (0/25)$$

$$24 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot x \quad \frac{x \cdot 15}{2} = 9 \quad x = \frac{18}{15} = \frac{6}{5} \quad (0/25)$$

$$\hat{M} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (12^\circ + 15^\circ) = 53^\circ \quad (0/25)$$



$$\frac{AB}{\sin \hat{M}} = \frac{BM}{\sin \hat{A}} \quad (0/25)$$

$$\frac{12}{\sin 53^\circ} = \frac{BM}{\sin 15^\circ} \quad \frac{12}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{BM}{\frac{1}{2}} \quad BM = 3\sqrt{2} \quad (0/25)$$